Ministério da Educação
GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + ... + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.

De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?

(A) 72

(B) 240

(C) 720

(D) 1440

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\bar{B}) = 0{,}3$
- $P(A \cap B) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0{,}4$

(B) $0{,}6$

(C) $0{,}7$

(D) $0{,}8$

3. Numa prateleira de uma perfumaria existe um conjunto de dez perfumes diferentes, sendo três de homem e sete de senhora. A gerente pretende escolher, ao acaso, seis desses dez perfumes para colocar na montra.

Seja X a variável aleatória «número de perfumes de homem que se colocam na montra».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

(A)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{70}{^{10}C_6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{70}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(D)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{7}{^{10}C_6}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$

Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -4 **(D)** 0

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f

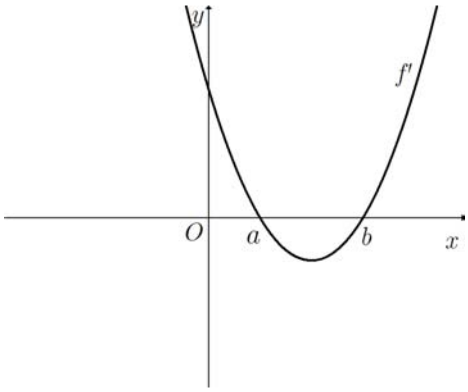
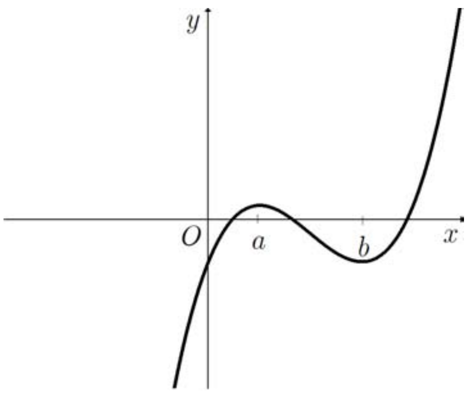


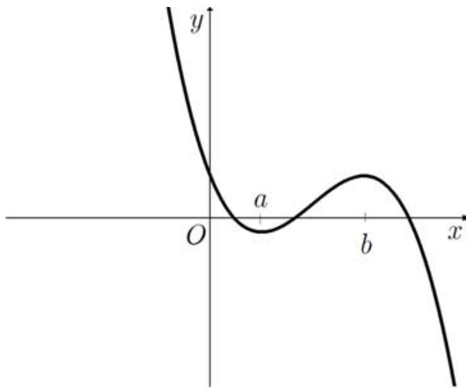
Figura 1

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

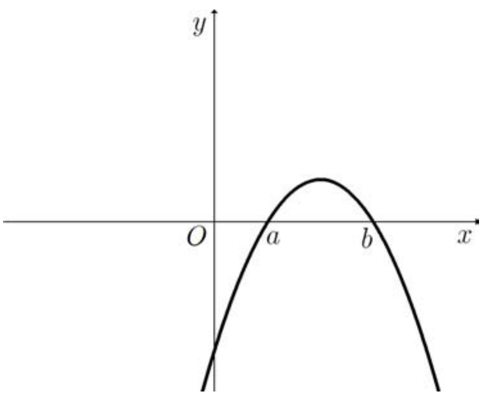
(A)



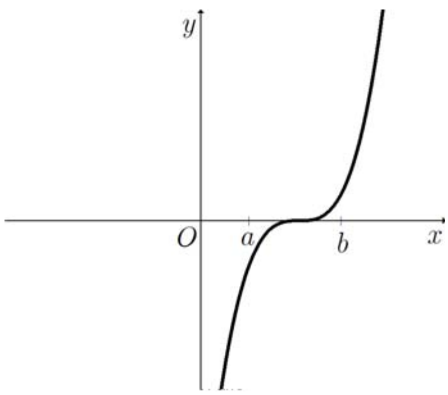
(B)



(C)



(D)



7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \left\{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\right\}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real

(B) o eixo imaginário

(C) a bissectriz dos quadrantes pares

(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T.

O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z

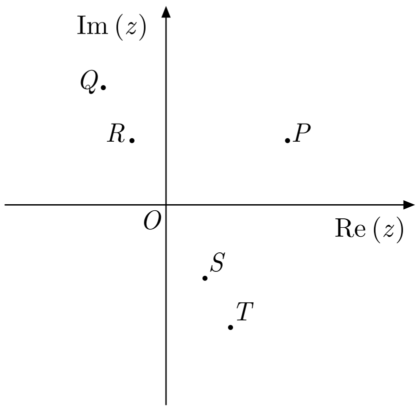


Figura 2

Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

(A) Q

(B) R

(C) S

(D) T

PÁGINA EM BRANCO

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Verifique que $z = 16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

2. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.

2.1. Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

2.2. Considere os acontecimentos:

A: «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;

B: «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».

Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada $P(B\,|\,A)$ é $\dfrac{16 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{25}C_{3}}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- a interpretação do significado de $P(B\,|\,A)$, no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer.

Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães.

Considere os acontecimentos:

A: «a Ana telefona à mãe»;

B: «a Joana telefona à mãe».

Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que $P(A) = 70\%$, que $P(B) = 80\%$ e que A e B são acontecimentos independentes.

Apresente o resultado em percentagem.

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \pi\right[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

5. Seja uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja a recta de equação $y = 1$ a única assimptota do gráfico de f

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + x$

Prove que o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Estude a continuidade da função h em $x = 0$

6.2. Resolva, no intervalo $\left]-\infty, 0\right]$, a inequação $h(x) > h(-4)$

7. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in \left[0, 24\right]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1. Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

7.2. Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	**40 pontos**

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.		
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.	15 pontos	
4.	15 pontos	
5.	15 pontos	
6.		
6.1.	15 pontos	
6.2.	15 pontos	
7.		
7.1.	10 pontos	
7.2.	15 pontos	
		160 pontos

TOTAL	**200 pontos**