



Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

- (A) 3C_2 (B) $6 \times {}^3C_2$ (C) 9A_3 (D) $6 \times {}^3A_2$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

| | | | | |
|--------------|-----|------|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x_i)$ | a | $2a$ | b | b |

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X > 1) = P(X < 2)$

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{17}{9}$ (D) $\frac{19}{12}$

3. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ

Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0,02275$

Qual é o valor de σ ?

- (A) 12 (B) 11 (C) 6 (D) 4

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{\text{sen}(-x)}{x}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

5. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^+

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

- (A) $y = \frac{1}{3}x$ (B) $y = \frac{2}{3}x$ (C) $y = x$ (D) $y = 3x$

6. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

- I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.
II) As funções f e g são monótonas crescentes.
III) $f'(-1) - g'(1) = \frac{2 \ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

- (A) II e III são verdadeiras.
(B) I é falsa e III é verdadeira.
(C) I é verdadeira e III é falsa.
(D) II e III são falsas.

Página em branco

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $z_3 = \operatorname{cis} \alpha$

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \bar{z}_2$ é um número real.

2. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

2.1. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n , sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A | \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.2. Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

Resolva o item 4.3., recorrendo à calculadora gráfica.

4.3. Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$
- B é o ponto de coordenadas $(5, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P , considere o triângulo $[ABP]$

Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

5. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3

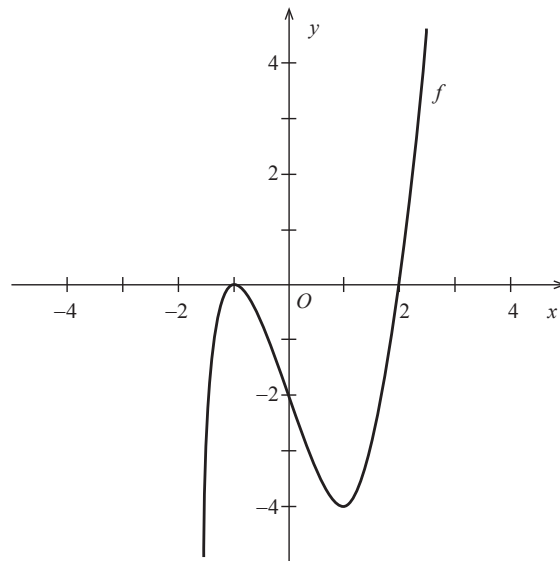
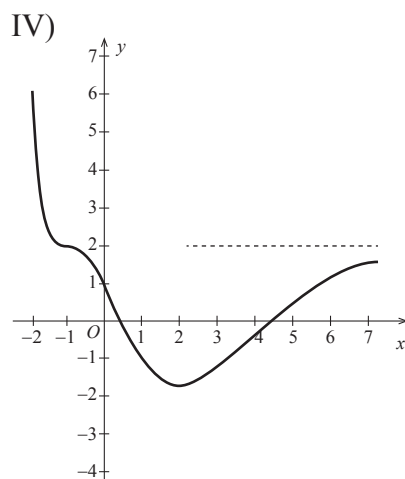
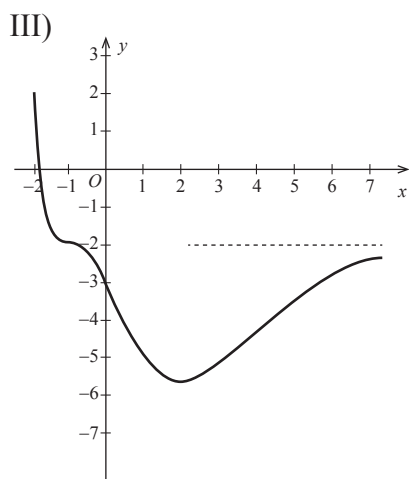
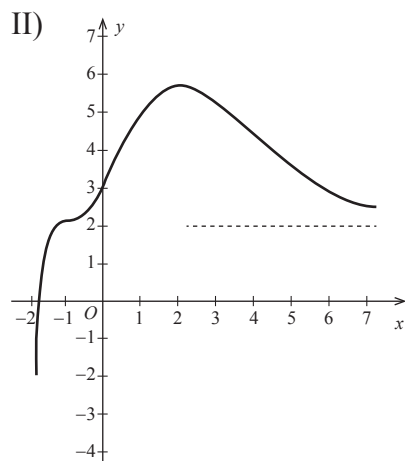
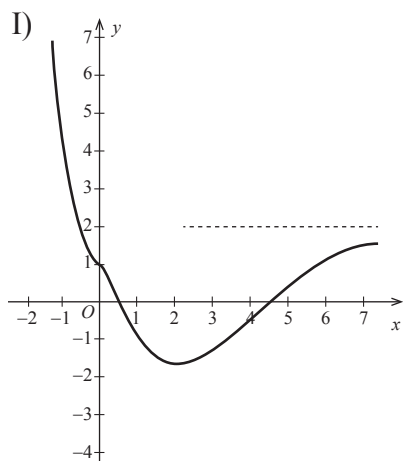


Figura 2

Sabe-se que:

- -1 e 2 são os únicos zeros da função f
- g' , a primeira derivada de uma certa função g , tem domínio \mathbb{R} e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2] = 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

6. Considere a função g , de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por $g(x) = \sin(2x) - \cos x$

Seja a um número real do domínio de g

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$

Determine o valor de a , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

7. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$

Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$

Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos) 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
1.1. 15 pontos
1.2. 10 pontos
2.
2.1. 15 pontos
2.2. 15 pontos
3. 15 pontos
4.
4.1. 15 pontos
4.2. 15 pontos
4.3. 15 pontos
5. 15 pontos
6. 15 pontos
7. 15 pontos

160 pontos

TOTAL **200 pontos**