GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos.

Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a $20\,000$?

(A) 5^4

(B) 5^5

(C) 3×5^4

(D) 4×5^4

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20

Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x - 1}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

4. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r

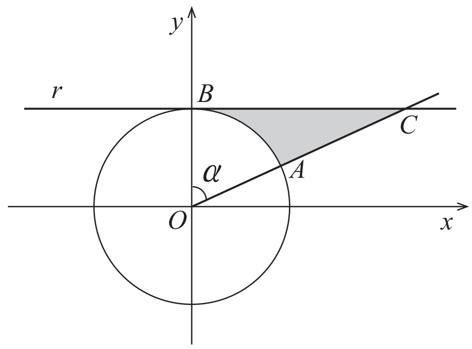


Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \alpha}{2}$

(B) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$

(C) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$

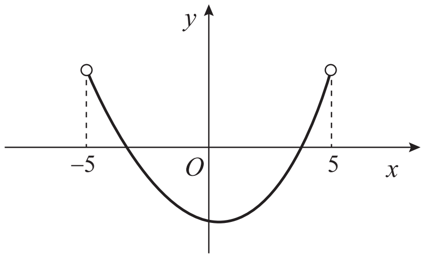
(D) $\dfrac{\alpha}{2}$

5. Seja f uma função de domínio $]-5, 5[$

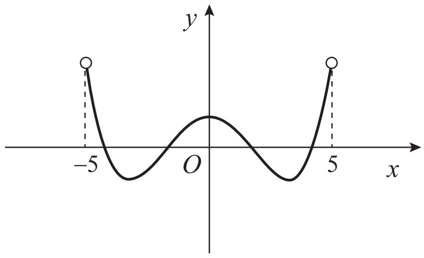
Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

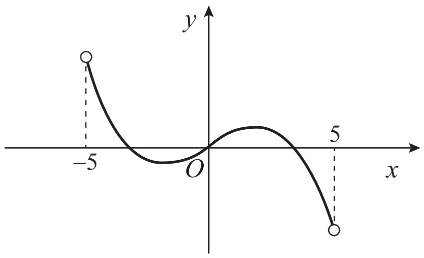
(A)



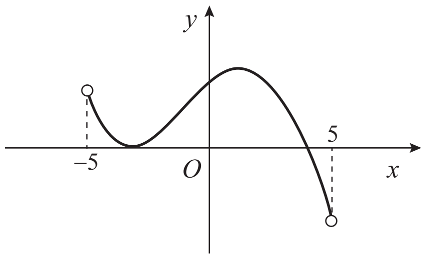
(B)



(C)



(D)



6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$

A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x-1}{f(x)}$?

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) $+\infty$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(2, 0, 3)$, e o plano α, definido por $x - y - 2z = 3$

Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $x + 2 = z + 1 \wedge y = 0$

(B) $-x + 5 = y + 3 = \frac{z + 3}{2}$

(C) $\frac{x - 1}{2} = \frac{z + 2}{3} \wedge y = -1$

(D) $x - 2 = -y = z - 3$

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

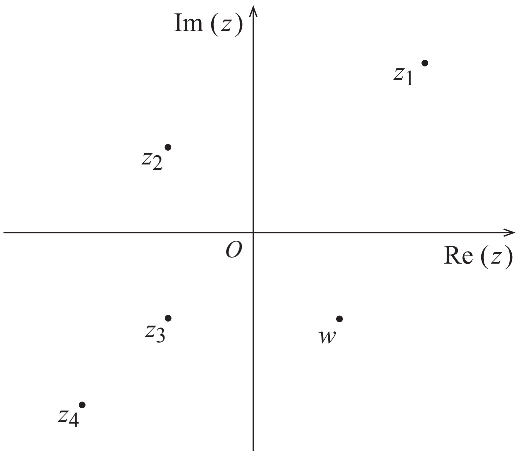


Figura 2

Qual é o número complexo que pode ser igual a $-2iw$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

1.1. Considere $z_1 = \dfrac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.2. Considere o número complexo $w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Escreva w na forma trigonométrica.

2. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos são rapazes;
- 80% dos alunos estão inscritos no desporto escolar;
- 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar.

2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que essa turma de 12.º ano tem 25 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar.

Determine a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
- A e B são acontecimentos independentes.

Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

4. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCOD]$

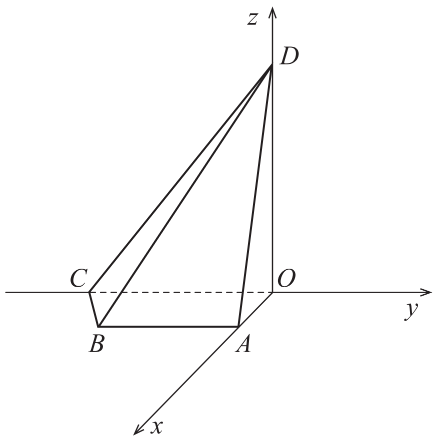


Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- os pontos A e B têm igual abcissa;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada -3
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- a reta AD é definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$
- $\|\overrightarrow{CD}\|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $]-\infty, e[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x \leq 2 \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k & \text{se } 2 < x < e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine k, de modo que a função f seja contínua em $x=2$

5.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

6.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

6.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação $y=mx$, com $m<0$

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abcissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

7. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3) \times f(5) < 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3, 5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0, +\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	10 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	15 pontos
7.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL	**200 pontos**