

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

VERSÃO 1

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

${}^n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = {}^n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,2$
- $P(B) = 0,3$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$

Qual é o valor de $P(A|B)$?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

2. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola.

Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4

Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres.

Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

- (A) 0,01536 (B) 0,05184 (C) 0,0768 (D) 0,2592

3. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_b a$?

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \ln x$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n}{e^n}$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

- (A) $-\infty$ (B) 0 (C) e (D) $+\infty$

5. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP

$$\left(\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right)$$

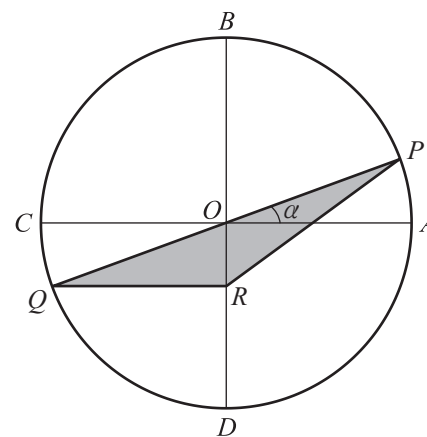


Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?

- (A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ (B) $\frac{\sin(2\alpha)}{4}$ (C) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ (D) $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$

6. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

- (A) 42 (B) 36 (C) 30 (D) 24

7. Considere, num referencial o.n. xOy , o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 1 \leq y \leq 5$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$

(B) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$

(C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

(D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

8. De uma progressão geométrica (u_n) , monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$

Qual é o quinto termo da sucessão (u_n) ?

(A) 64

(B) 128

(C) 256

(D) 512

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9

1.1. Considere duas caixas, U e V

Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V

Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10»

B : «O produto dos números das fichas retiradas é ímpar»

Determine o valor de $P(B|A)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta:

- explique o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita;
- indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u, v) , em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V
- indique os casos favoráveis;
- apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

1.2. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4)

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 2

2. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$

Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-1+i}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

3.1. Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

3.2. Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

3.3. Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α , tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

4. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

4.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no

intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

4.3. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B , cujas abscissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abscissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abscissas dos pontos A e B

Apresente essas abscissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal p , em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens 5.1. e 5.2. recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item 5.1., pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

5.1. O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% ($x = 0,003$)

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n , e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6. Seja g uma função contínua, de domínio \mathbb{R} , tal que:

- para todo o número real x , $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real a , tem-se $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	6.	160
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	
TOTAL													200

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.^a Fase

VERSÃO 1