Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 11, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

Uma autarquia, no aniversário do município, irá inaugurar um novo edifício dos paços do concelho e, no âmbito das comemorações, pretende realizar algumas iniciativas culturais.

1. A autarquia encomendou a uma empresa de tecelagem o fabrico de uma tapeçaria de grandes dimensões, para decorar o salão nobre do novo edifício dos paços do concelho.

A Figura 1 representa, esquematicamente, o projecto da parte central da tapeçaria.

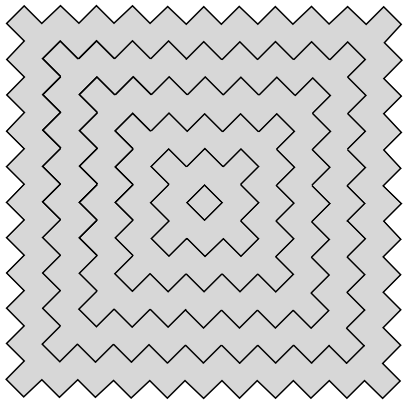


Figura 1

A Figura 2 representa, ordenadamente, os quatro primeiros elementos da sequência finita de linhas poligonais fechadas, utilizada no projecto de concepção da tapeçaria.

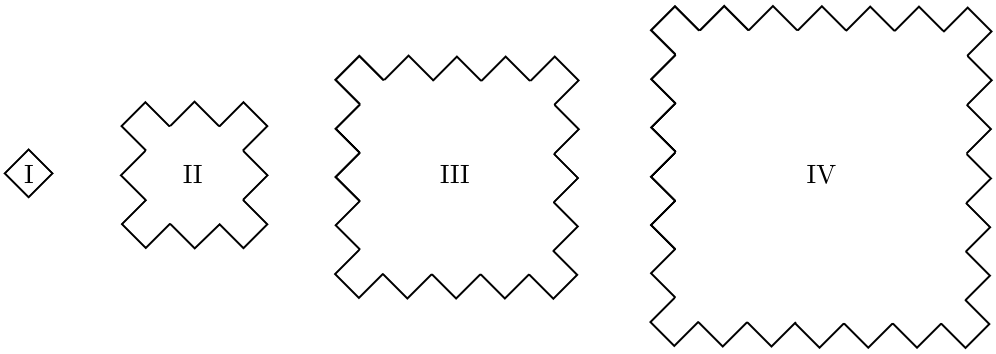


Figura 2

Ao longo de toda a sequência, que tem mais de 30 elementos, de cada linha poligonal para a seguinte, o número de lados aumenta de forma constante. Tal como se pode observar na Figura 2, as linhas poligonais I, II, III e IV têm, respectivamente, 4, 20, 36 e 52 lados.

1.1. Mostre que, nesta sequência, nenhuma das linhas poligonais tem 456 lados.

1.2. Ao longo da sequência, o comprimento de cada um dos lados de qualquer linha poligonal mantém-se constante, sendo sempre igual a 1 centímetro.

Determine o número mínimo de elementos consecutivos desta sequência que é necessário considerar, incluindo o primeiro, para que a soma dos comprimentos das respectivas linhas poligonais seja superior a 32 metros.

2. A Figura 3 representa, esquematicamente, um azulejo com a forma de um quadrado, $[ACSP]$, cujo lado mede 12 centímetros.

Este quadrado, de centro O, está subdividido em quatro quadrados geometricamente iguais: $[ABOQ]$, $[BCRO]$, $[QOUP]$ e $[ORSU]$

Cada um destes quadrados contém, no seu interior, um quarto de círculo, de raio igual a 6 centímetros, que pode, ou não, estar sombreado, tal como se vê na Figura 3.

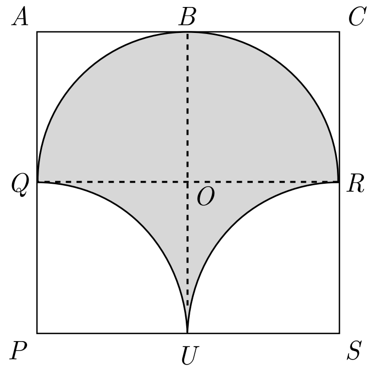


Figura 3

2.1. Mostre que, no quadrado $[ACSP]$, a área da parte sombreada é igual à área da parte não sombreada.

2.2. Um friso é constituído por azulejos iguais ao azulejo representado na Figura 3.

Na Figura 4, está esquematizado o padrão utilizado na construção de um friso, constituído por quatro desses azulejos, colocado nas paredes de uma sala dos paços do concelho.

Os quadrados $[CEGS]$, $[PSKM]$ e $[SGIK]$ podem obter-se, a partir do quadrado $[ACSP]$, utilizando transformações geométricas.

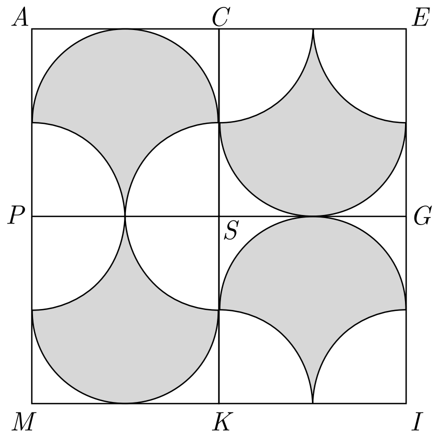
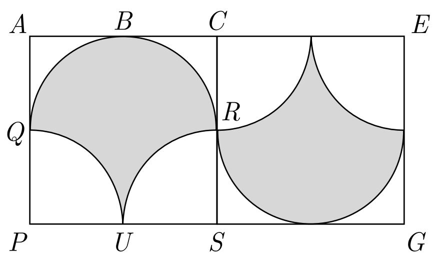


Figura 4

2.2.1. Designe por I uma rotação que permita obter $[CEGS]$ a partir de $[ACSP]$

A Figura 5 ilustra a situação.



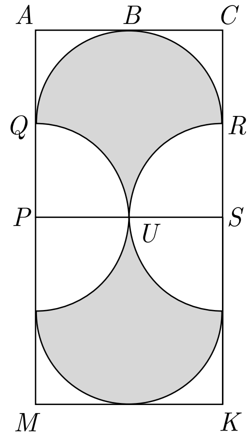
$$\mathrm{I} : [ACSP] \rightarrow [CEGS]$$

Figura 5

Indique um valor da amplitude e o centro da transformação geométrica I.

2.2.2. Designe por II uma simetria axial que permita obter $[PSKM]$ a partir de $[ACSP]$

A Figura 6 ilustra a situação.



$\mathrm{II}: [ACSP] \rightarrow [PSKM]$

Figura 6

Indique o eixo de simetria da transformação geométrica II.

3. A autarquia pretende editar um livro sobre a história, a gastronomia e os pontos de interesse turístico do concelho. O custo total da produção e da edição do livro depende do número de exemplares que for encomendado.

De acordo com o melhor orçamento apresentado em sessão da câmara, o custo total, C, em euros, da produção e da edição de x centenas de exemplares do livro é dado, aproximadamente, por:

$$C(x) \;=\; 500\,x \;+\; 8000 \qquad \text{para} \quad x \geq 0$$

Os responsáveis autárquicos aprovaram o orçamento e deliberaram:

- encomendar a produção e a edição de 1000 exemplares;
- colocar os exemplares à venda nos postos do Gabinete de Turismo, pelo valor de 15 euros cada.

Como a venda dos exemplares fica a cargo dos serviços camarários, não há qualquer acréscimo ao custo de produção e de edição.

Um funcionário da autarquia fez a seguinte afirmação:

«A quantia resultante da venda de 800 exemplares, ao preço de 15 euros cada, não é suficiente para pagar o custo total da encomenda.»

A afirmação é verdadeira? Justifique.

GRUPO II

A CADTEL é uma cadeia de grandes hotéis e possui dois hotéis, numa certa região, distanciados alguns quilómetros um do outro: o VISTASERRA e o VISTAMAR.

1. Estes dois grandes hotéis diferem no modo de funcionamento e na especificidade dos serviços que prestam aos seus clientes.

A disponibilidade de quartos é a seguinte:

- VISTASERRA: 500 quartos;
- VISTAMAR: 600 quartos.

Cada hotel tem a sua equipa fixa de trabalhadores. Além destes, a CADTEL dispõe de uma bolsa comum de recursos humanos, formada por trabalhadores que desempenham funções em qualquer dos dois hotéis, de acordo com as necessidades de serviço de cada hotel.

Admita que, por cada dezena de quartos ocupados, por noite, em cada hotel, é necessário recrutar, na bolsa comum, os seguintes trabalhadores:

	Recepcionistas	**Empregados de bar**	**Funcionários do serviço de quartos**
VISTASERRA	2	1	4
VISTAMAR	1	2	3

Entretanto, uma epidemia fez adoecer alguns trabalhadores da bolsa comum da CADTEL e, nestas circunstâncias, a disponibilidade de recursos humanos desta bolsa é a seguinte:

- 100 recepcionistas;
- 120 empregados de bar;
- 210 funcionários do serviço de quartos.

Designe por x o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA, e por y o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR.

Qual deverá ser, nas condições referidas, face aos recursos humanos disponiveis, o número de quartos ocupados, por noite, no VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no VISTAMAR, de modo a que seja máximo o número total de quartos ocupados, por noite, no conjunto dos dois hotéis?

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- determinar o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR correspondentes à solução do problema.

2. Estes dois hotéis da cadeia CADTEL estão equipados com painéis solares do mesmo tipo.

Na Figura 7, está representado um desses painéis, com superfície rectangular, apoiado numa plataforma horizontal e equipado com um elevador hidráulico.

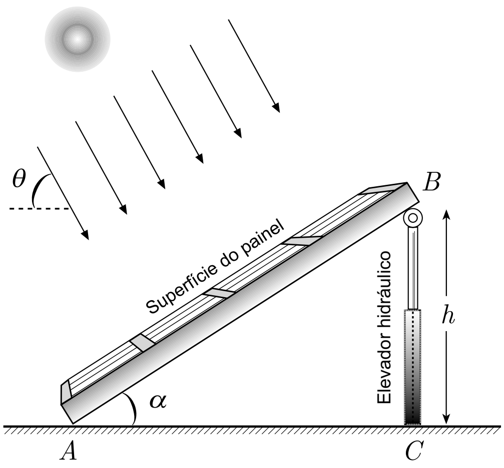


Figura 7

O movimento do elevador mantém a perpendicularidade dos raios solares em relação à superfície do painel, mas apenas durante a parte do dia em que a inclinação (θ) dos raios solares, em relação ao solo, varia entre 30° e 70°.

A Figura 8 ilustra o funcionamento do painel, de forma esquemática, durante essa parte do dia.

Admita que:

- $\overline{AB} = 5\,\mathrm{m}$
- o ponto B desloca-se no quarto de circunferência ED, de centro em A
- o ponto C acompanha o movimento do ponto B, deslocando-se ao longo de $[AD]$, de modo que $[BC] \perp [AC]$
- h é a distância, em metros, do ponto B à plataforma
- θ é a amplitude, em graus, da inclinação dos raios solares, com $30^{\circ} \leq \theta \leq 70^{\circ}$
- α é a amplitude, em graus, do ângulo BAC

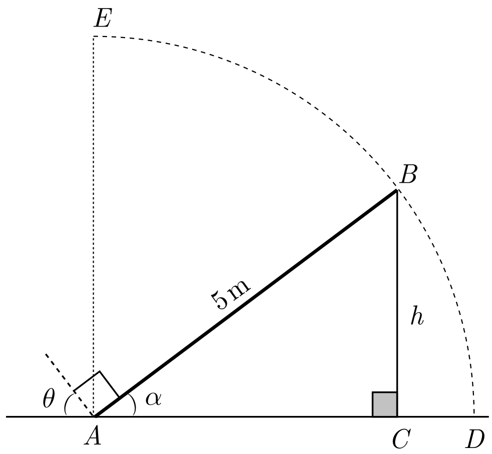


Figura 8

2.1. Mostre que $h = 5\cos\theta$

Sugestão: Poderá ser-lhe útil começar por mostrar que a amplitude do ângulo ABC é θ

2.2. Determine os valores de θ e de α, quando $h = 2{,}5$

GRUPO III

No casino ALEA, em *LA PLACE*, um dos jogos favoritos é o «Riscar, Pintar e Ganhar».

Cada apostador compra um boletim de jogo, tal como o que se representa na Figura 9.

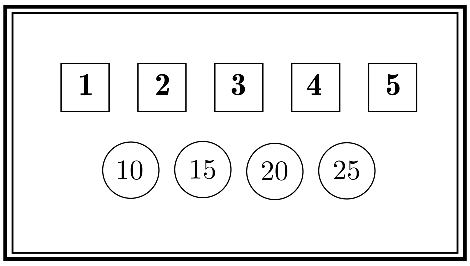


Figura 9

Para preencher o boletim e efectuar, assim, a respectiva aposta, cada apostador deve riscar um número da tabela, seleccionando um número de 1 a 5, e pintar o círculo referente a um número da parte inferior do boletim, seleccionando um número múltiplo de 5, de 10 a 25.

Depois de feitas as apostas, os funcionários do casino realizam uma experiência aleatória que consiste em dois sorteios: primeiro, sorteiam um número de 1 a 5 e, depois, sorteiam um número múltiplo de 5, de 10 a 25.

1. Quantos são os casos em que o produto dos números sorteados é um número par?

Justifique.

2. Neste jogo, são atribuídos três prémios, de acordo com os seguintes critérios:

- o primeiro prémio é atribuído aos apostadores que acertem simultaneamente nos dois números;
- o segundo prémio é atribuído aos apostadores que só acertem no número de 1 a 5;
- o terceiro prémio é atribuído aos apostadores que só acertem no número múltiplo de 5, de 10 a 25.

Considere que, em cada um dos sorteios, os números têm igual probabilidade de serem sorteados.

O Albertino, que conhece este jogo, decidiu calcular o valor da probabilidade de um apostador obter o segundo prémio e o valor da probabilidade de obter o terceiro prémio.

Chegou à seguinte conclusão:

«A probabilidade de um apostador obter o segundo prémio é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de um apostador obter o terceiro prémio é $\frac{1}{4}$.»

Justifique que nenhum dos valores das probabilidades apresentados pelo Albertino está correcto.

Na sua resposta, elabore uma pequena composição, na qual refira os seguintes aspectos:

- explicação do número de casos possíveis da experiência aleatória;
- apresentação do valor da probabilidade correspondente ao segundo prémio, com a devida explicação do número de casos favoráveis a este prémio;
- apresentação do valor da probabilidade correspondente ao terceiro prémio, com a devida explicação do número de casos favoráveis a este prémio.

GRUPO IV

Um investigador estudou a evolução da epidemia de cólera que ocorreu numa certa região de um país, durante os anos de 2000 e 2001. No início do ano de 2000, o total da população dessa região era de $950\,000$ pessoas.

Com base nos estudos efectuados, o investigador considerou que, nessa região, o número total de pessoas, da população inicial, que foram contagiadas pela doença, desde o início do ano de 2000 até ao instante t, é dado, aproximadamente, por:

$$F(t) = \frac{57\ 000}{1 + 4980 \times e^{-0{,}27t}} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq t \leq 60$$

A variável t representa o tempo, em semanas, decorrido desde o início do ano de 2000.

1. De acordo com o modelo apresentado, o número de pessoas contagiadas duplicou num intervalo de poucas semanas, passando de $10\,000$ para $20\,000$.

Determine a duração desse intervalo de tempo.

Apresente o resultado em semanas e dias (dias arredondados às unidades).

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize, no mínimo, três casas decimais.

2. Sabe-se que o modelo logístico definido pela função F se manteve válido ao longo de 60 semanas.

Determine a percentagem da população inicial de $950\,000$ pessoas que foi contagiada pela doença, no referido período de tempo.

Apresente o resultado aproximado às unidades.

3. Considere a seguinte afirmação:

«O valor da taxa de variação instantânea de F em $t = 30$ é maior do que o valor da taxa de variação instantânea de F em $t = 40$.»

Explique, no contexto do problema, o significado da afirmação.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.

- **1.1.** .... 10 pontos
- **1.2.** .... 15 pontos

2.

- **2.1.** .... 15 pontos
- **2.2.**
  - **2.2.1.** .... 10 pontos
  - **2.2.2.** .... 5 pontos

3. .... 15 pontos

70 pontos

GRUPO II

1. .... 20 pontos

2.

- **2.1.** .... 20 pontos
- **2.2.** .... 15 pontos

55 pontos

GRUPO III

1. .... 10 pontos

2. .... 20 pontos

30 pontos

GRUPO IV

1. .... 20 pontos

2. .... 15 pontos

3. .... 10 pontos

45 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango:

$$\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$$

Trapézio:

$$\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$$

Polígono regular:

$\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica:
$4\, \pi\, r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro recto:
$2\, \pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então:

- média de X:

$$\mu = p_1\, x_1 + \ldots + p_n\, x_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$