Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/Época Especial

8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

ou

$\dfrac{\alpha \pi r}{180}$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular:
$\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

ou

$\dfrac{\alpha \pi r^2}{360}$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi\, r\, g$ $\quad(r$ – *raio da base;* g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica:
$4\, \pi\, r^2$ $\quad(r$ – *raio*$)$

Área lateral de um cilindro recto:
$2\, \pi\, r\, g$ $\quad(r$ – *raio da base;* g – *geratriz*$)$

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $(r -$ *raio*$)$

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- média de X:

  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- desvio padrão de X:

  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

GRUPO I

Uma empresa fabrica caleiras para escoamento de águas pluviais, utilizando chapas metálicas de largura fixa e de espessura desprezável. As chapas são assentes numa plataforma horizontal e são dobradas longitudinalmente, de modo que as faces laterais das caleiras sejam geometricamente iguais e formem um ângulo de amplitude θ com a horizontal, como se ilustra na Figura 1.

A partir de um corte transversal numa caleira deste tipo, pode obter-se um trapézio isósceles, como o trapézio $[ABCD]$, apresentado no esquema da Figura 2.

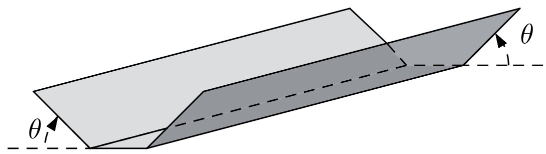

Figura 1

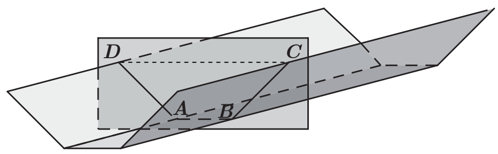

Figura 2

A altura da caleira é igual à altura do trapézio e depende da amplitude θ do ângulo de dobragem.

Relativamente ao trapézio $[ABCD]$, representado na Figura 3, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 10\ \mathrm{cm}$
- $\overline{BC} = 12\ \mathrm{cm}$
- F é o ponto da semi-recta $\dot{A}B$ tal que $\overline{BF} = 12\ \mathrm{cm}$
- $F\hat{B}C = \theta$, com $0^{\mathrm{o}} < \theta < 90^{\mathrm{o}}$
- $\overline{BE}$ é a altura, em cm, do trapézio;
- $F\hat{B}C = E\hat{C}B$

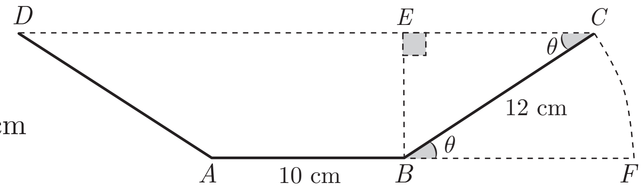

Figura 3

1. Determine θ, em graus, de modo que o trapézio $[ABCD]$ tenha $6\,\mathrm{cm}$ de altura.

2. Mostre que a área, R, em cm^2, do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de θ, por

$$R(\theta) = 120\,\mathrm{sen}(\theta) + 144\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

O argumento das funções seno e co-seno está em **graus**.

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por mostrar que $\overline{EC} = 12\cos(\theta)$ e que $\overline{BE} = 12\,\mathrm{sen}(\theta)$

3. A capacidade de escoamento da caleira será máxima quando o trapézio $[ABCD]$ tiver a maior área possível.

Determine θ, em graus, de modo que a capacidade de escoamento da caleira seja máxima.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Note que a área, R, em cm^2, do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de θ, por $R(\theta) = 120\,\mathrm{sen}(\theta) + 144\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$, com o argumento das funções seno e co-seno em **graus**.

GRUPO II

Os grilos são insectos conhecidos pelo seu canto peculiar – as estridulações, sons vibrantes produzidos com as asas anteriores. Há diversos países onde se faz a criação de grilos em cativeiro com fins comerciais.

1. No Verão, é possível estimar o valor da temperatura ambiente ouvindo as estridulações emitidas pelos grilos.

Em 1897, o americano Amos Dolbear verificou experimentalmente que a frequência das estridulações dos grilos aumenta com a subida da temperatura ambiente, quando esta varia entre determinados valores. Dolbear chegou a uma relação que permite estimar, muito aproximadamente, o valor da temperatura ambiente, T, em graus Celsius (ºC), a partir do número de vezes, n, que um grilo canta, por **minuto**.

Essa relação, conhecida por lei de Dolbear, é dada por

$$T(n) = \frac{n - 40}{7} + 10$$

1.1. Numa noite de Verão, durante 1 minuto, ouviu-se um grilo cantar 45 vezes em cada 15 segundos.

Estime o valor da temperatura ambiente, em graus Celsius, naquele minuto, com base na lei de Dolbear.

1.2. Num dia de Verão, ao entardecer, registou-se o número de vezes que se ouviu um grilo cantar e estimaram-se, com base na lei de Dolbear, os valores da temperatura ambiente em dois períodos de tempo: das 18 horas e 15 minutos às 18 horas e 16 minutos e das 19 horas e 44 minutos às 19 horas e 45 minutos.

Verificou-se que o grilo cantou menos sete vezes no segundo período de tempo do que no primeiro.

Determine a diferença entre os valores estimados para a temperatura ambiente naqueles dois períodos de tempo.

2. Numa criação de grilos, realizou-se, a partir do dia 2 de Julho de 2010, inclusive, um controlo semanal do número de efectivos da sua população, durante um período de dez semanas.

Admita que, de acordo com os dados recolhidos, o número de grilos, g, existentes x semanas após aquele dia é dado, em **milhares**, aproximadamente, por

$$g(x) = 1{,}2 \times e^{0{,}1484x} \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 10$$

2.1. Mostre que, no período considerado, a população de grilos aumentou semanalmente cerca de 16% (valor percentual arredondado às unidades).

2.2. Num certo dia do mês de Julho de 2010, o número de efectivos da população de grilos era 1392.

No dia em que o número de grilos atingiu o triplo do número dos que existiam naquele dia do mês de Julho de 2010, procedeu-se a uma redistribuição dos grilos pelas diferentes caixas de criação.

Em que data é que se procedeu a essa redistribuição?

Justifique a sua resposta.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, cinco casas decimais.

GRUPO III

Todos os alunos de uma turma do 11.º ano do Curso de Artes Visuais frequentam as disciplinas de Geometria Descritiva A e de Matemática B.

Na tabela seguinte, estão registadas as classificações, numa escala de 0 a 20 valores, obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Matemática B, no final do 1.º período.

Classificação (de 0 a 20 valores)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Número de alunos	4	1	1	6	2	1	1	1	2	1

1. Pretende-se seleccionar, aleatoriamente, dois alunos para responderem a dois inquéritos distintos. Um aluno responderá apenas a um inquérito, e o outro aluno responderá apenas ao outro inquérito.

Determine a probabilidade de serem seleccionados dois alunos, de modo que a média das respectivas classificações na disciplina de Matemática B, no final do 1.º período, seja exactamente 10 valores.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2. A Figura 4 apresenta o diagrama de extremos e quartis relativo às classificações, numa escala de 0 a 20 valores, obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Geometria Descritiva A, no final do 1.º período.

Classificações obtidas na disciplina de Geometria Descritiva A

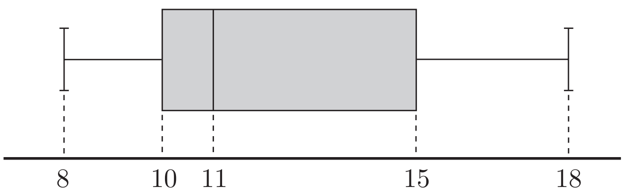

Figura 4

Designando por x as classificações obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Matemática B, no final do 1.º período, e por y as classificações obtidas pelos alunos dessa turma na disciplina de Geometria Descritiva A, no final do 1.º período, construiu-se o seguinte modelo de regressão linear:

$$y = 1{,}030504x - 1{,}184350 \quad \text{com} \quad 9 \leq x \leq 18$$

Elabore uma pequena composição na qual compare as classificações obtidas pelos alunos, no final do 1.º período, nas disciplinas de Matemática B e de Geometria Descritiva A, justificando os factos de:

- a correlação entre as classificações obtidas pelos alunos nas disciplinas de Matemática B e de Geometria Descritiva A ser positiva;
- a mediana das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Matemática B ser superior à mediana das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Geometria Descritiva A;
- a média de $12{,}6$ valores das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Matemática B ser superior à média, estimada a partir do modelo de regressão linear, das classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Geometria Descritiva A.

GRUPO IV

A dimensão da população residente num certo concelho, criado em meados do século XIX, tem variado ao longo do tempo, reflectindo alterações das condições socioeconómicas, variações da taxa de natalidade e diferentes fluxos migratórios.

O teatro municipal foi inaugurado na data da constituição do concelho.

1. Admita que, do início do ano de 1900 ao início do ano de 2010, o número, P, em **milhares**, de habitantes desse concelho é dado, aproximadamente, em função do tempo, t, em anos, decorrido desde o início do ano de 1900, por

$$P(t) = 7 + 0{,}25 \times 2^{-0{,}1t} \times \left(0{,}0001t^4 - 0{,}1t^2 + 30\right) \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq 110$$

1.1. Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número **total** de anos em que o número de habitantes do concelho esteve compreendido entre 8000 e $12\,000$.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

1.2. Na Figura 5, que não está à escala, apresenta-se um esboço do gráfico da função Q. Esta função dá, em milhares de habitantes por ano, a taxa de variação instantânea da função P no instante t

Tal como a figura ilustra, $23{,}2$ e $65{,}2$ são os valores, arredondados às décimas, dos zeros da função Q

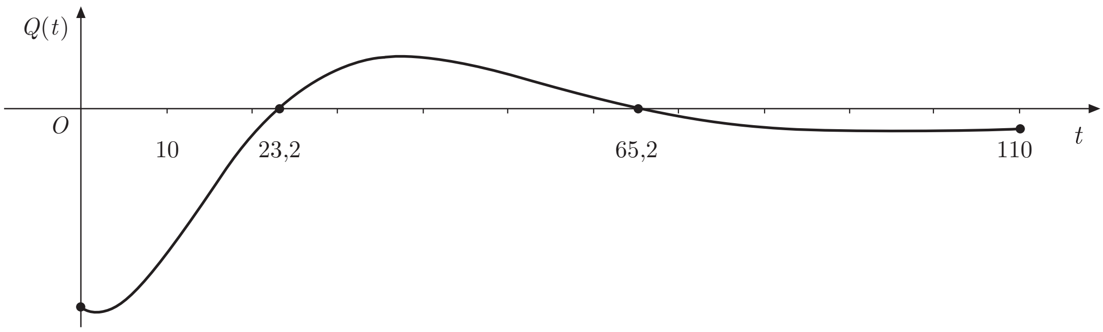

Figura 5

De acordo com o modelo apresentado, o número de habitantes do concelho foi diminuindo, até atingir um mínimo no ano de 1923. A partir daí, o número de habitantes foi aumentando, até atingir um máximo no ano de 1965.

Justifique a ocorrência desse mínimo e a ocorrência desse máximo, com base na relação existente entre o sinal da função Q e a monotonia da função P

2. A sala principal do teatro municipal encontra-se em obras de remodelação.

A Figura 6 representa, esquematicamente, um dos desenhos que será utilizado na redecoração do tecto dessa sala. O contorno exterior do desenho é uma linha poligonal fechada, formada por 12 segmentos de recta geometricamente iguais.

A Figura 7 mostra a composição geométrica utilizada na construção dessa linha poligonal, de vértices A, G, B, H, C, I, D, J, E, K, F e L

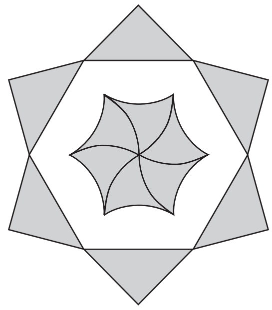

Figura 6

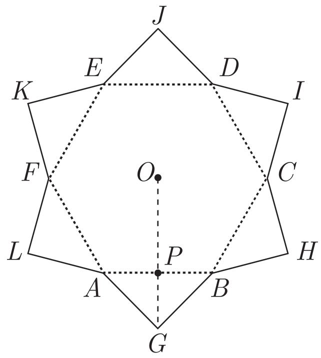

Figura 7

A composição é constituída pelo hexágono regular $[ABCDEF]$, de centro no ponto O, e por seis triângulos rectângulos isósceles, geometricamente iguais, sendo $[AGB]$ um desses triângulos.

A hipotenusa de cada triângulo é um dos lados do hexágono. O ponto P é o ponto médio de $[AB]$

2.1. Uma rotação é uma transformação geométrica que é caracterizada pelo seu centro e por uma amplitude do ângulo de rotação.

Caracterize uma rotação que transforme o quadrilátero $[OFLA]$ no quadrilátero $[OBHC]$

2.2. O hexágono regular e os seis triângulos rectângulos isósceles constituem a região delimitada pela linha poligonal fechada.

Determine a área, em dm^2, dessa região, admitindo que $\overline{AB} = 8\,\mathrm{dm}$

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Sugestão – Para obter a área pedida, poderá ter em conta que $\overline{AB} = \overline{BO}$ e começar por mostrar que a altura $\overline{OP}$, em dm, do triângulo $[ABO]$ é $\sqrt{48}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	20 pontos
3.	15 pontos
	45 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	10 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	20 pontos
	60 pontos

GRUPO III

1.	10 pontos
2.	20 pontos
	30 pontos

GRUPO IV

1.	
1.1.	20 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	20 pontos
	65 pontos

TOTAL .... **200 pontos**