GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/Época Especial

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Uma escola secundária está a preparar a comemoração do seu aniversário.

1. A associação de estudantes está a organizar o sexto torneio de xadrez, que decorrerá no dia do aniversário da escola.

1.1. No âmbito de um trabalho de Estatística, uma turma do 10.º ano aplicou um questionário em que uma das perguntas era: «Dos cinco torneios de xadrez já realizados, em quantos participaste?».

A pergunta foi respondida por 100 alunos e os resultados obtidos são os que constam da tabela seguinte, em que a e b são números naturais.

N.º de torneios	0	1	2	3	4	5
N.º de alunos	a	25	15	11	b	10

Sabe-se que a média de participações desses 100 alunos nos cinco torneios de xadrez é $1{,}7$

Determine o valor de a e o valor de b

1.2. No sexto torneio de xadrez, todos os jogadores disputarão duas partidas.

As regras estabelecidas pela organização para a atribuição de pontos, por partida, são as seguintes:

Vitória	**Empate**	**Derrota**
3 pontos	2 pontos	0 pontos

Admita que, para cada jogador, em cada partida, são igualmente prováveis a obtenção de vitória, de derrota e de empate.

Seja X a variável aleatória «número de pontos obtidos por um determinado jogador, no total de duas partidas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente os valores das probabilidades na forma de fração.

2. Numa das paredes do átrio principal da escola, foi colocado um painel alusivo à comemoração. A superfície desse painel tem a forma de um quadrado, com 6 metros de lado, e está dividida em duas regiões de cores diferentes.

Na Figura 1, o quadrado $[ABCD]$ representa essa superfície, e o triângulo $[AED]$ e o trapézio $[EBCD]$ representam as regiões de cores diferentes.

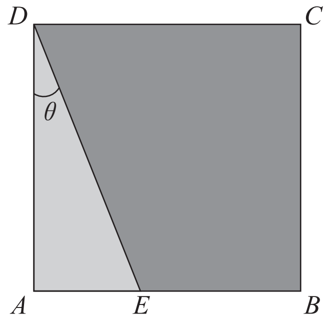

Figura 1

Considere que o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$ e não coincide com o ponto A nem com o ponto B

Seja θ a amplitude, em graus, do ângulo ADE, com $0^\circ < \theta < 45^\circ$

2.1. Mostre que a área, T, em metros quadrados, do triângulo $[AED]$ pode ser dada, em função de θ, por

$$T(\theta) = 18 \operatorname{tg} \theta$$

2.2. Determine o valor de θ para o qual a área do triângulo $[AED]$ é metade da área do trapézio $[EBCD]$

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

GRUPO II

O actínio 288 é um isótopo radioativo. A massa de um isótopo radioativo presente numa substância vai diminuindo com o tempo. Este processo designa-se decaimento radioativo.

Seja A a massa de actínio 288, em gramas, presente, num dado instante, numa determinada substância.

Admita que, ao fim de t horas, a partir desse instante, a massa de actínio 288, Q, em gramas, presente na substância, é dada por

$$Q(t) = A\,e^{-0{,}11t} \quad \text{com } t \geq 0$$

1. Um cientista afirmou que:

> «De acordo com o modelo de decaimento descrito, não é possível que duas substâncias que, num dado instante, contenham massas diferentes de actínio 288 venham posteriormente a conter, num mesmo instante, massas iguais de actínio 288.»

Justifique que a afirmação do cientista está correta.

2. Admita que, às 10 horas de um determinado dia, se regista a massa de actínio 288 presente numa certa substância e que, ao fim de t horas, a partir desse instante, a massa de actínio 288 presente nessa substância é dada, de acordo com o modelo de decaimento descrito, por

$$Q_1(t) = 50\,e^{-0{,}11t}$$

2.1. A que horas, desse dia, a massa de actínio 288 presente na substância ficou reduzida a metade da massa existente às 10 horas?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Admita também que, a partir das 10 horas desse dia, a massa de actínio 288 presente numa outra substância é dada, de acordo com o mesmo modelo, por

$$Q_2(t) = 75\,e^{-0{,}11t}$$

O gráfico da função Q_2 obtém-se a partir do gráfico da função Q_1 pela transformação que respeita a igualdade $Q_2(t) = k\,Q_1(t)$, para todo o t, sendo k um número real.

Qual é o valor de k ?

GRUPO III

Numa unidade agroindustrial, existe um projeto para construir um reservatório com $1000\,\mathrm{dm}^3$ de capacidade, constituído por duas superfícies semiesféricas e por uma superfície cilíndrica, justapostas, tal como se representa na Figura 2, em que:

- r representa o raio, em dm, da base do cilindro e o raio de cada uma das superfícies semiesféricas;
- h representa a altura, em dm, da superfície cilíndrica.

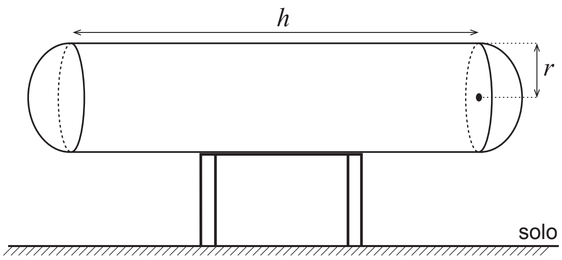

Figura 2

Admita que o material usado na construção do reservatório é de espessura desprezável.

1. Mostre que, sendo o volume do reservatório igual a $1000\,\mathrm{dm}^3$, a altura h, em função de r, é dada por

$$h = \frac{3000 - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$$

2. Justifique, no contexto descrito, que 6 é o maior valor inteiro que r pode tomar.

3. Seja $r = 3$

Determine a área total, em dm^2, da superfície do reservatório.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, agora, a função h, definida por $h(r) = \dfrac{3000 - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$, com $r \in [1, 6]$

Seja F a função que dá a taxa de variação instantânea da função h, para cada valor de r

Interprete, no contexto do problema, o facto de se ter $F(r) < 0$, para qualquer valor de $r \in [1, 6]$

GRUPO IV

O João foi dar um passeio com o avô por uma avenida ladeada por belas árvores. O avô do João contou-lhe que, no final do século XIX, o avô dele, o trisavô do João, tinha tratado daquelas árvores quando ainda eram pequenas.

1. Disse o avô ao João:

«O meu avô tratava as árvores com guano, que é uma espécie de estrume. Para veres como a vida era dura nesses tempos, vou dizer-te como ele o fazia. O meu avô tinha de transportar um cesto de guano para junto de cada uma das árvores. Começava por carregar o cesto no monte, ia até uma árvore e despejava o cesto. Voltava ao monte e repetia a operação para a árvore seguinte, até ter estrumado todas as árvores. No fim, deixava o cesto no monte.

Repara que, de um e de outro lado da avenida, cada árvore dista $8{,}4$ metros da seguinte e que da primeira à última árvore vão 630 metros. Do monte de guano à primeira árvore de cada lado iam 32 metros.

O meu avô era um homem rijo. Para realizar esta tarefa, percorria 1625 metros numa hora e trabalhava 9 horas por dia!»

A Figura 3, que não está desenhada à escala, reproduz um esquema da avenida, de acordo com a descrição do avô do João.

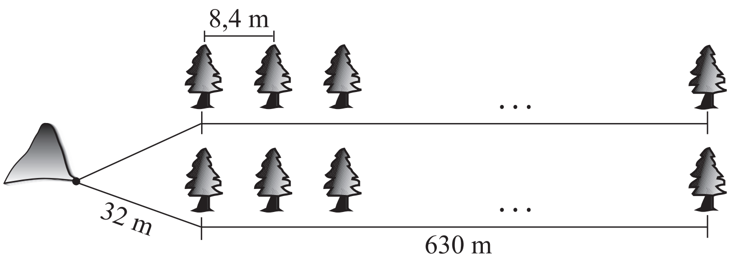

Figura 3

1.1. Verifique que, na realização desta tarefa, o trisavô do João percorria, no total, $105\,488$ metros.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

1.2. Determine o tempo total que o trisavô do João demorava na realização da tarefa.

Apresente o resultado em dias e horas de trabalho, com o valor das horas arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

2. A propósito do que o avô lhe contara, o João lembrou-se de um problema que resolvera numa aula de Matemática.

O problema era o seguinte:

«Na segunda década do século XX, uma fábrica de adubos produzia diariamente dois tipos de adubo, *A* e *B*, cuja produção exigia a utilização de estrume.

A produção de cada quilograma de adubo *A* exigia dois quilogramas de estrume e a produção de cada quilograma de adubo *B* exigia três quilogramas de estrume.

A fábrica podia utilizar diariamente até 450 quilogramas de estrume.

A produção de um quilograma de adubo *A* exigia meia hora de trabalho de um operário e a produção de um quilograma de adubo *B* exigia quinze minutos de trabalho de um operário.

A fábrica tinha oito operários, que trabalhavam diariamente dez horas cada um.

A venda da totalidade do adubo produzido esteve sempre garantida: cada quilograma de adubo *A* dava um lucro de 5 tostões e cada quilograma de adubo *B* dava um lucro de 6 tostões.

Designe por x o número de quilogramas de adubo *A* produzidos diariamente e por y o número de quilogramas de adubo *B* produzidos diariamente.

Determine o valor de x e o valor de y de modo que o lucro fosse máximo.»

2.1. Seria possível, nas condições referidas, a fábrica ter produzido, num mesmo dia, 100 quilogramas de adubo *A* e 100 quilogramas de adubo *B*?

Justifique a sua resposta.

2.2. Numa pequena composição, interprete, justificando no contexto do problema, o significado das expressões seguintes:

I) $5x + 6y$

II) $2x + 3y \leq 450$

III) $0{,}5x + 0{,}25\,y \leq 80$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.		
1.1.	....	15 pontos
1.2.	....	15 pontos
2.		
2.1.	....	10 pontos
2.2.	....	20 pontos
		60 pontos

GRUPO II

1.	....	10 pontos
2.		
2.1.	....	20 pontos
2.2.	....	5 pontos
		35 pontos

GRUPO III

1.	....	15 pontos
2.	....	10 pontos
3.	....	15 pontos
4.	....	10 pontos
		50 pontos

GRUPO IV

1.		
1.1.	....	15 pontos
1.2.	....	10 pontos
2.		
2.1.	....	10 pontos
2.2.	....	20 pontos
		55 pontos

TOTAL .... **200 pontos**