REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

O gestor de uma cadeia hoteleira encomendou um estudo sobre a rentabilidade de cada um dos hotéis dessa cadeia.

Admita que, nesse estudo, se concluiu que o custo operacional diário, C, em euros, de um dos hotéis, em função da sua taxa de ocupação diária, t, em percentagem, é dado por

$$C(t) = t^2 - 90t + 3500, \quad \text{com} \quad t \in [0, 100]$$

Por exemplo, $C(20)$ é o custo operacional diário desse hotel, correspondente a uma taxa de ocupação diária de 20%

1. Determine a taxa de ocupação diária para a qual o custo operacional diário desse hotel é mínimo.

2. Sabe-se que $\dfrac{C(50) - C(30)}{50 - 30} = -10$

Interprete, no contexto do problema, o significado desta igualdade.

3. No estudo realizado, verificou-se que a receita diária, R, em euros, desse hotel é uma função linear de t definida por

$$R(t) = a \times t, \quad \text{com} \quad t \in [0, 100]$$

em que a representa um número real positivo.

O respetivo saldo diário, S, é dado por

$$S(t) = R(t) - C(t), \quad \text{com} \quad t \in [0, 100]$$

Sabe-se que, com uma taxa de ocupação diária de 50%, o saldo diário é 2000 euros.

3.1. Mostre que $S(t) = -t^2 + 160t - 3500$

3.2. O autor do estudo verificou que, com determinadas taxas de ocupação diária, se obtinham saldos diários superiores ao que se obtinha com uma taxa de ocupação diária de 100%

Determine os valores da taxa de ocupação diária para os quais tal se verifica.

GRUPO II

Nas maternidades, existem diversos serviços especializados, como os de neonatologia e de obstetrícia.

1. Os serviços de apoio ao serviço de neonatologia de uma maternidade produzem capas de proteção de incubadoras de dois tipos: A e B. As componentes principais destas capas de proteção são gaze esterilizada e um tecido especial.

Diariamente, esses serviços dispõem de 18 unidades de gaze esterilizada, de 15 unidades de tecido especial e de 21 horas de trabalho para a produção das capas.

A produção de uma capa do tipo A requer uma unidade de gaze esterilizada, duas unidades de tecido especial e três horas de trabalho.

A produção de uma capa do tipo B requer duas unidades de gaze esterilizada, uma unidade de tecido especial e uma hora de trabalho.

Os serviços pretendem produzir, diariamente, o maior número total de capas, nas condições descritas.

Designe por x o número de capas do tipo A e por y o número de capas do tipo B que os serviços produzem diariamente.

Determine o número de capas do tipo A e o número de capas do tipo B que os serviços devem produzir, diariamente, para que o número total de capas produzidas seja máximo.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Em obstetrícia, é possível obter, com ecografias efetuadas ao longo do período gestacional do feto, importantes indicadores relativos à saúde do futuro recém-nascido, uma vez que há relação entre as características do feto e as características do recém-nascido.

2.1. O diâmetro biparietal de um feto, medido na 34.ª semana de gravidez, permite calcular uma boa estimativa do perímetro cefálico do recém-nascido.

Uma equipa de obstetras recolheu os dados representados no diagrama de dispersão da Figura 1, relativos ao diâmetro biparietal, x, em centímetros, medido em ecografias de fetos efetuadas na 34.ª semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico dos recém-nascidos, y, também em centímetros.

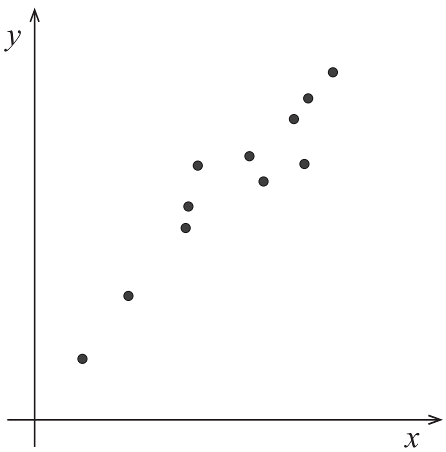

Figura 1

O diagrama de dispersão não está à escala, e as coordenadas dos pontos representados são:

$(7,49;\ 30,36)$, $(7,81;\ 31,99)$, $(8,21;\ 33,66)$, $(8,23;\ 34,22)$, $(8,30;\ 35,26)$, $(8,66;\ 35,51)$, $(8,76;\ 34,86)$, $(8,97;\ 36,44)$, $(9,04;\ 35,30)$, $(9,07;\ 36,97)$ e $(9,24;\ 37,63)$

Verifica-se uma correlação linear forte entre as variáveis estatísticas x e y

Determine, com base nestes dados, o valor do respetivo coeficiente de correlação linear.

Na sua resposta, recorra às ferramentas de estatística da calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

2.2. Admita que o perímetro cefálico, em centímetros, numa população de recém-nascidos em certa maternidade, em certo ano civil, segue uma distribuição normal de valor médio $34{,}8 \text{ cm}$

Relativamente a esta população, considere as afirmações seguintes.

A) A probabilidade de um recém-nascido, escolhido ao acaso, ter perímetro cefálico inferior a $34{,}8 \text{ cm}$ é 75%

B) É igualmente provável que um recém-nascido, escolhido ao acaso, tenha perímetro cefálico superior a 35 cm ou tenha perímetro cefálico inferior a 34 cm

C) A probabilidade de um recém-nascido, escolhido ao acaso, ter perímetro cefálico superior a 34 cm é $0{,}45$

Apresente, num pequeno texto, para cada uma das afirmações, uma razão que justifique que é falsa.

GRUPO III

Considere uma sequência de construções geométricas, em que:

- a 1.ª construção é formada por um círculo de raio 1
- a 2.ª construção é formada por dois círculos, cada um com raio igual a metade do raio do círculo da 1.ª construção;
- a 3.ª construção é formada por quatro círculos, cada um com raio igual a metade do raio dos círculos da 2.ª construção;
- e assim sucessivamente.

Na Figura 2, estão representadas as quatro primeiras construções dessa sequência.

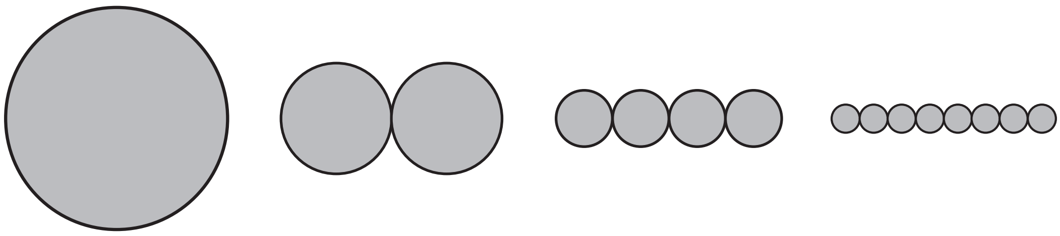

Figura 2

1. Quantos círculos formam a 100.ª construção desta sequência?

Justifique a sua resposta.

Apresente o resultado na forma de potência.

2. Determine a soma das áreas dos círculos que formam a 10.ª construção desta sequência.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

3. Seja n um número natural. Considere a construção de ordem n desta sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos círculos que formam essa construção é 2π

4. Considere o retângulo e os três círculos representados na Figura 3, em que:

- o círculo maior, de raio 1, é o círculo da 1.ª construção;
- os círculos menores, de raio $\frac{1}{2}$, são os círculos da 2.ª construção.

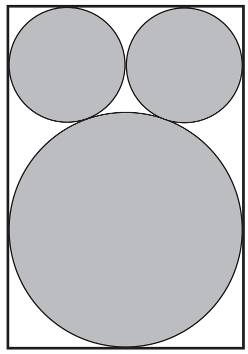

Figura 3

Tal como a figura sugere, todos os círculos são tangentes a lados do retângulo e são tangentes entre si.

Determine a área da região do retângulo não ocupada pelos círculos.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Na sua resposta, pode considerar o triângulo isósceles cujos vértices coincidem com os centros dos três círculos.

5. Considere um referencial ortogonal e monométrico, Oxy, cuja unidade de medida é o raio da circunferência do círculo da 1.ª construção e cuja origem é o centro dessa circunferência, tal como se ilustra na Figura 4.

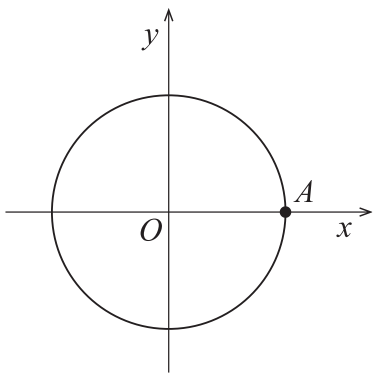

Figura 4

Na Figura 4, está assinalado o ponto A, ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas.

Indique as coordenadas do ponto simétrico do ponto A relativamente ao eixo das ordenadas.

GRUPO IV

O princípio de funcionamento de um motor de combustão interna consiste no movimento retilíneo de um êmbolo no interior de um cilindro. Esse movimento transmite-se, por intermédio de uma biela, a uma manivela, transformando-se em movimento de rotação.

Com base nesse mecanismo, foram elaborados os esquemas da Figura 5,

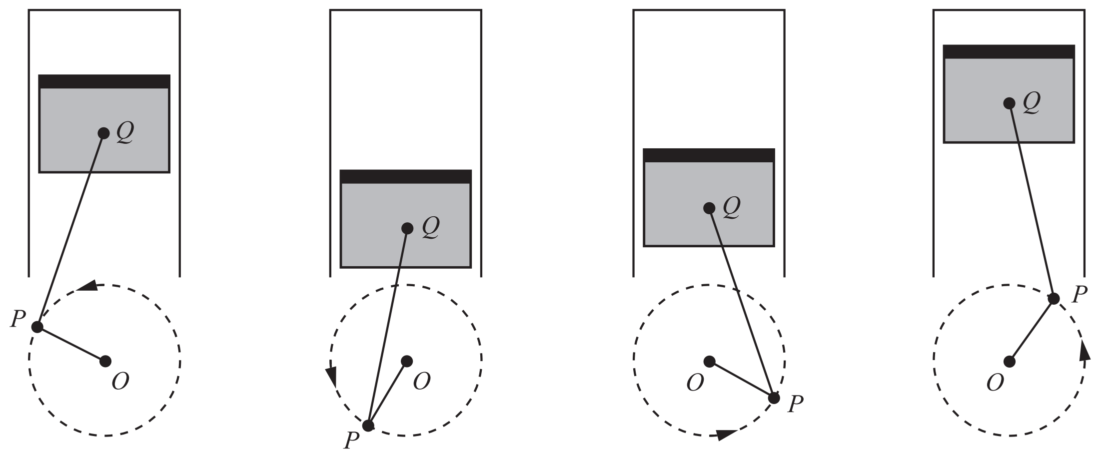

Figura 5

em que:

- o retângulo a sombreado representa o êmbolo, em quatro posições do seu movimento;
- o segmento de reta $[PQ]$ representa a biela;
- o segmento de reta $[OP]$ representa a manivela;
- a circunferência de centro no ponto O representa o movimento de rotação do ponto P em torno do ponto O

Na Figura 6, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy , um dos esquemas da Figura 5.

Nesse esquema, que não está à escala:

- o ponto Q pertence ao semieixo positivo Oy
- θ é a amplitude, em graus, de um ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$, em sentido positivo.

Admita que $\overline{OP} = 1$ e que $\overline{PQ} = 4$

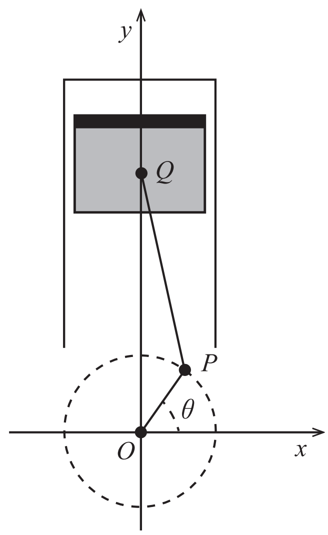

Figura 6

1. No movimento de rotação do ponto P , a distância do ponto Q ao ponto O depende da amplitude θ

Determine o menor valor e o maior valor que essa distância pode ter, quando $0^{\text{o}} \leq \theta < 360^{\text{o}}$

Na sua resposta, comece por indicar para que amplitudes θ ocorrem esses valores.

2. Considere, agora, a rotação do ponto P apenas no primeiro quadrante.

Determine uma expressão que dê a distância do ponto Q ao ponto O , em função de θ , com $0^{\text{o}} < \theta < 90^{\text{o}}$

Na sua resolução, comece por decompor o triângulo $[OPQ]$ em dois triângulos retângulos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item					
	Cotação (em pontos)					
I	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**		
	10	10	20	15		**55**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**			
	30	10	20			**60**
III	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
	10	15	10	15	5	**55**
IV	**1.**	**2.**				
	10	20				**30**
TOTAL						**200**