REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, e assinale os pontos relevantes para a resolução (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

A *LICORAL* é uma pequena empresa que se dedica ao fabrico de licor sem álcool.

1. Entre os vários licores fabricados pela *LICORAL*, existem duas variedades de licor de abacaxi muito apreciadas: A e B.

Cada garrafa da variedade A dá um lucro de 20 euros e é fabricada com $1\ \text{kg}$ de abacaxi e $0{,}5\ \text{kg}$ de açúcar.

Cada garrafa da variedade B dá um lucro de 15 euros e é fabricada com $0{,}8\ \text{kg}$ de abacaxi e $0{,}7\ \text{kg}$ de açúcar.

Num certo dia, a empresa dispõe de $55\ \text{kg}$ de abacaxi e de $35\ \text{kg}$ de açúcar para fabricar estas duas variedades de licor.

De acordo com a estratégia de *marketing* adotada pela *LICORAL*, esta empresa nunca fabrica menos de 14 garrafas de licor da variedade A nem menos de 10 garrafas de licor da variedade B.

Admita que todas as garrafas produzidas são vendidas.

Determine quantas garrafas da variedade A e quantas garrafas da variedade B deve a *LICORAL* produzir, de modo a maximizar o lucro com a venda destas duas variedades de licor.

Na sua resposta, designe por x o número de garrafas de licor da variedade A e por y o número de garrafas de licor da variedade B, e percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– indicar a função objetivo;

– indicar as restrições do problema;

– representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;

– apresentar o valor de x e o valor de y que são a solução do problema.

2. Na Figura 1, está representado, num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, em que a unidade é 1 centímetro, um modelo geométrico de uma garrafa de licor utilizada pela *LICORAL*.

O modelo desta garrafa é a pirâmide quadrangular regular $[OPQRV]$ em que:

- o segmento de reta $[AV]$ é a altura da pirâmide;
- o ponto B é o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$
- $\overline{PQ} = 8 \text{ cm}$
- $A\hat{V}B = 9^{\circ}$

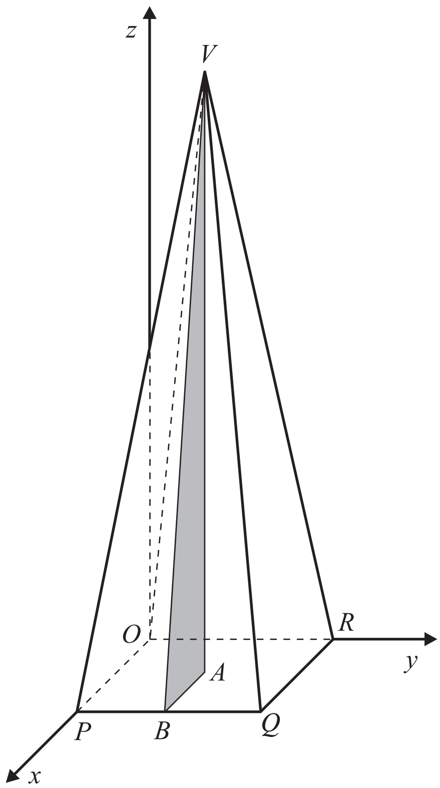

Figura 1

2.1. Foi colado um rótulo numa das faces laterais da garrafa. Esse rótulo é um triângulo geometricamente igual a uma face lateral da pirâmide.

Determine a área do rótulo.

Apresente o resultado em cm^2, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2.2. Tal como a Figura 1 sugere, o segmento de reta $[OP]$ está contido no semieixo positivo Ox, e o segmento de reta $[OR]$ está contido no semieixo positivo Oy

Seja Q' o simétrico do ponto Q relativamente ao plano yOz

Quais são as coordenadas do ponto Q' ?

GRUPO II

O futebol é considerado o desporto mais popular do mundo.

Numa cidade, decorreu um jogo de futebol entre duas equipas rivais.

1. Admita que, antes do início do jogo, entre as dezasseis horas e as dezasseis e quinze, se contou, minuto a minuto, o número de espectadores que entraram no estádio.

Sabe-se que, no primeiro desses quinze minutos, entraram 160 espectadores no estádio.

Sabe-se ainda que o número de espectadores que entraram no estádio em cada um dos minutos seguintes ultrapassou em vinte o número de espectadores que entraram no estádio no minuto anterior.

1.1. Mostre que, ao longo desses quinze minutos, o número de espectadores que entraram no estádio no minuto de ordem n é dado por $20\,n + 140$

1.2. Sabe-se que, às dezasseis horas, se encontravam dentro do estádio 2931 espectadores.

Determine o número total de espectadores que se encontravam dentro do estádio às dezasseis horas e quinze minutos.

2. A Maria, a Inês e o Pedro foram assistir ao jogo de futebol.

Durante o intervalo, decidiram que cada um comeria um gelado e que escolheriam, ao acaso, qual deles pagaria os três gelados.

No final do jogo, decidiram que cada um beberia uma garrafa de água e que escolheriam, ao acaso, qual deles pagaria as três garrafas.

Qual é a probabilidade de a Maria não pagar qualquer das despesas?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Numa das equipas, a média das idades dos onze jogadores que iniciaram a partida era igual a 22 anos.

Um desses onze jogadores era o guarda-redes veterano Manuel Vento.

Determine a idade, em anos, do jogador Manuel Vento, nesse dia, sabendo-se que a média das idades dos restantes dez jogadores era igual a $20{,}8$ anos.

GRUPO III

Em Portugal existem várias atividades ligadas ao mar.

1. Admita que, ao longo de dois dias, a profundidade da água do mar, p, num certo local da costa portuguesa, medida em metros, t horas após as zero horas do primeiro desses dois dias, é dada por

$$p(t) = 5 + 0{,}48 \operatorname{sen} (0{,}5t - 9{,}15) \qquad (0 \leq t \leq 48)$$

O argumento da função seno está em radianos.

Determine a que horas do segundo dia é que a profundidade da água do mar atingiu pela primeira vez, nesse local, a profundidade de $5{,}2$ metros.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Num certo laboratório, estudam-se problemas relacionados com a fauna e a flora marítimas.

Nesse laboratório, às zero horas do dia 1 de junho de 2017, colocou-se em cultura uma certa quantidade de organismos vivos.

Sabe-se que, t dias após esse instante, a massa total, m, de organismos vivos existentes na cultura é dada, em gramas, por

$$m(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}4t}} \qquad (t \geq 0)$$

2.1. Determine a massa total, em gramas, dos organismos colocados vivos na cultura às zero horas do dia 1 de junho de 2017.

2.2. Determine ao fim de quanto tempo a massa total de organismos vivos existentes na cultura foi 750 gramas.

Apresente o resultado em dias e horas (horas arredondadas às unidades).

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Considere a função, V, que dá a taxa de variação instantânea da função m, para cada valor de t pertencente a $\mathbb{R}_0^+$

Interprete, no contexto descrito, o significado de

$$V(1{,}5) \approx 56$$

3. Registou-se o salário médio, em euros, de um trabalhador por conta de outrem no sector de Agricultura e Pescas, entre 1985 e 2012.

Na tabela abaixo, onde se encontram alguns desses registos, x designa o ano e y designa o correspondente salário médio, em euros, de um trabalhador.

Ano (x)	1985	1989	1992	1995	1999	2000	2003	2005	2007	2010	2012
Salário médio, em euros (y)	106,6	179,8	276,5	349,8	429,8	459,1	527,5	558,6	611,9	683,7	708,2

Considere válido um modelo de regressão linear, $y = ax + b$ (em que a e b são números reais), obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o salário médio de um trabalhador em 2001.

Na sua estimativa, utilize o valor de a e o valor de b arredondados às centésimas.

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

GRUPO IV

O chocolate, feito com base na amêndoa fermentada e torrada do cacau, é nutritivo e pode considerar-se um alimento de elevada qualidade.

1. Uma empresa dedica-se ao fabrico artesanal de chocolate.

Admita que o custo de produção, C, em euros, de cada quilograma de chocolate fabricado nessa empresa é dado por

$$C(x) = \frac{100 + 20x}{x} \qquad (x > 0)$$

em que x é o número de quilogramas fabricados.

1.1. Num certo dia, a empresa fabricou vinte e cinco quilogramas de chocolate.

Determine quanto gastou a empresa, nesse dia, na produção desses vinte e cinco quilogramas de chocolate.

1.2. Determine a quantidade de chocolate que é necessário fabricar, de modo que o custo de produção de cada quilograma de chocolate seja vinte e seis euros.

Apresente o resultado, em quilogramas, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	**1.**	**2.1.**	**2.2.**			
	30	15	10			**55**
II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**		
	10	15	15	15		**55**
III	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	
	20	10	15	10	15	**70**
IV	**1.1.**	**1.2.**				
	10	10				**20**
TOTAL						**200**