REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. O Sr. Nunes tem uma propriedade com um terreno agrícola que pretende cultivar.

O terreno está destinado, na sua totalidade, ao cultivo de milho e ao cultivo de centeio.

O seguinte sistema de restrições permite determinar as áreas possíveis para o cultivo de milho e para o cultivo de centeio.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 40 \\ x + y \leq 60 \\ y \leq x \end{cases}$$

Neste sistema, x representa o número de hectares do terreno que podem ser destinados ao cultivo de milho, e y representa o número de hectares do terreno que podem ser destinados ao cultivo de centeio.

1.1. Será possível cultivar no terreno 20 hectares de milho e 30 hectares de centeio?

Justifique a sua resposta.

1.2. O Sr. Nunes prevê obter 380 euros de lucro por cada hectare de milho cultivado e 150 euros de lucro por cada hectare de centeio cultivado.

Quantos hectares do terreno deverão ser destinados ao cultivo de milho e quantos hectares do terreno deverão ser destinados ao cultivo de centeio, para que, de acordo com a previsão do Sr. Nunes, o lucro seja máximo?

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– a solução do problema.

2. No muro que delimita a propriedade do Sr. Nunes, está pintada uma sequência de números hexagonais.

Na Figura 1, representam-se os quatro primeiros números hexagonais, H_1 , H_2 , H_3 e H_4 , dessa sequência.

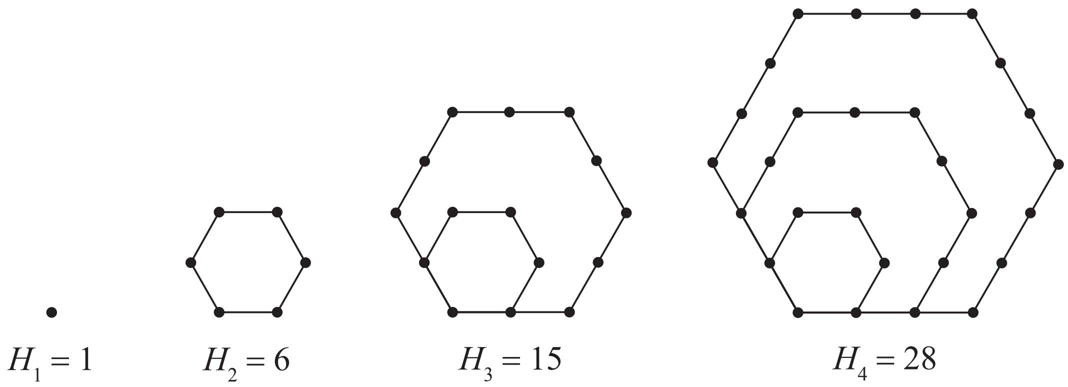

Figura 1

Tal como a figura sugere, na sucessão dos números hexagonais, verifica-se que:

$$H_1 = 1$$
$$H_2 = 1 + 5$$
$$H_3 = 1 + 5 + 9$$
$$H_4 = 1 + 5 + 9 + 13$$
$$(...)$$
$$H_n = 1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n - 3)$$

2.1. Mostre que o número hexagonal de ordem n pode ser dado por

$$H_n = 2n^2 - n$$

2.2. O número hexagonal 7140 é o penúltimo número da sequência pintada no muro.

Qual é o último número hexagonal da sequência pintada no muro?

Justifique a sua resposta.

3. As araucárias são árvores de grande porte. Em Portugal, existem exemplares de araucárias de diferentes espécies, uma delas conhecida por araucária-do-brasil.

Na propriedade do Sr. Nunes, está plantada uma araucária-do-brasil.

Admita que a altura, h, em metros, da araucária plantada na propriedade do Sr. Nunes, em função da sua idade, t, em anos, é dada por

$$h(t) = -4{,}5375 + 6{,}52 \ln(t) \ , \text{ com } t \in [4, 30]$$

3.1. Determine, de acordo com o modelo apresentado, a idade dessa araucária ao atingir 16 metros de altura.

Apresente o resultado em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

3.2. Seja I a função que dá a taxa de variação instantânea da função h, para cada valor de t.

Sabe-se que $I(20) = 0{,}326$.

Interprete esta igualdade no contexto descrito.

3.3. A tabela seguinte apresenta os registos, obtidos ao longo de vários anos, da altura, h, da araucária plantada na propriedade do Sr. Nunes e do correspondente diâmetro, d, da copa.

Altura (metros) (h)	4,6	5,8	6,7	7,7	10,7	12,7	13,9	16,9
Diâmetro (metros) (d)	3,5	4,1	5,3	6,6	8,6	9,9	10,8	14,1

Considere um modelo de regressão linear obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o diâmetro da copa da araucária ao atingir 25 anos de idade.

Na sua resposta, apresente:

- a altura da araucária, em metros, arredondada às décimas, ao atingir 25 anos de idade;
- os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de d sobre h, arredondados com quatro casas decimais;
- o valor pedido, em metros, arredondado às décimas.

4. A propriedade do Sr. Nunes localiza-se numa região vinhateira.

Na Figura 2, está representado um dos barris que o Sr. Nunes tem na adega.

Nesta figura:

- D representa o diâmetro maior do barril, em decímetros;
- d representa o diâmetro das bases do barril, em decímetros;
- h representa a altura do barril, em decímetros.

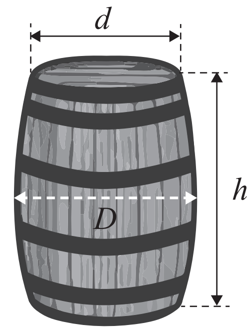

Figura 2

A capacidade, em litros, de um barril deste tipo pode ser dada, aproximadamente, por

$$C = \frac{\pi \times h}{12}\left(2D^2 + d^2\right)$$

4.1. Admita que o diâmetro maior do barril mede $7{,}5\ \text{dm}$, o diâmetro das bases mede $5\ \text{dm}$ e a altura do barril mede $8{,}4\ \text{dm}$.

É possível armazenar 300 litros de vinho nesse barril?

Justifique a sua resposta.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

4.2. O Sr. Nunes vai encomendar um novo barril, que terá, também, $8{,}4\ \text{dm}$ de altura e bases com $5\ \text{dm}$ de diâmetro.

Determine o valor mínimo do diâmetro maior desse barril, de modo que permita o armazenamento de 450 litros de vinho.

Apresente o resultado, em decímetros, arredondado às décimas.

Na sua resposta, comece por apresentar uma expressão da capacidade do novo barril, C, em função do diâmetro maior, D.

5. Inspirado numa estrutura que viu numa rotunda do Cartaxo, cuja fotografia se apresenta na Figura 3, o Sr. Nunes construiu uma estrutura semelhante na sua propriedade, constituída por dez barris de madeira.

Figura 3

A Figura 4 é um esquema obtido a partir de um corte vertical dessa estrutura, feito pelos diâmetros maiores dos barris. Este esquema é constituído por dez circunferências geometricamente iguais, cada uma com o diâmetro correspondente ao diâmetro maior dos barris.

Na Figura 4:

- quaisquer duas circunferências contíguas são tangentes entre si;
- $[AB]$ representa a base da estrutura e k representa a distância, em metros, do ponto mais alto da estrutura à base da mesma.

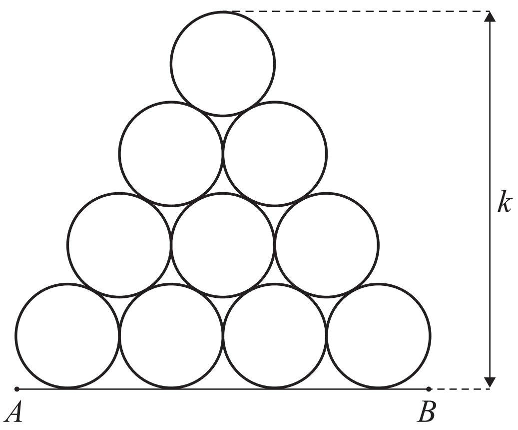

Figura 4

Admita que o diâmetro maior de cada barril da estrutura mede $10\ \mathrm{dm}$.

5.1. Determine a altura da estrutura, representada por k na Figura 4.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, caso proceda a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

5.2. Na Figura 5, estão representadas, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy , uma das circunferências da Figura 4, com $5\ \mathrm{dm}$ de raio, e a reta PQ , sendo P o ponto da circunferência e do semieixo negativo das abcissas e Q o ponto da circunferência e do semieixo negativo das ordenadas.

A unidade de medida no referencial é o decímetro.

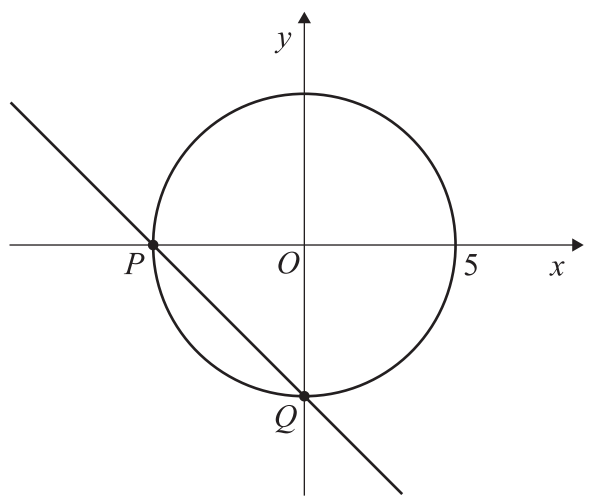

Figura 5

Determine a equação reduzida da reta PQ .

6. A neta do Sr. Nunes costuma andar num triciclo antigo, idêntico ao da Figura 6, que pertencia ao avô.

A Figura 7 mostra um esquema da roda da frente desse triciclo, com o ponto médio de um dos raios assinalado pela letra F. Este ponto representa o centro de um pequeno enfeite colorido que a neta do Sr. Nunes colocou nesse raio.

Figura 6

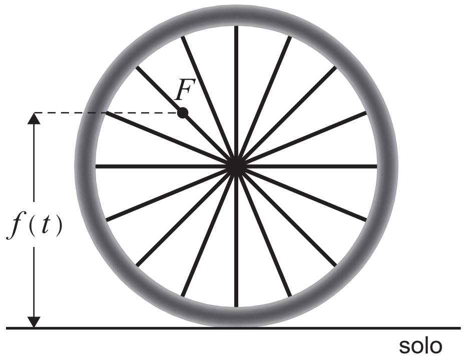

Figura 7

Numa das vezes em que a neta do Sr. Nunes andou no triciclo, em linha reta e a uma velocidade constante, foi registado o tempo que o triciclo demorou a percorrer um certo percurso. Nenhuma das rodas do triciclo derrapou nem patinou.

Sabe-se que, t segundos após o triciclo ter começado a andar, a distância do centro do enfeite ao solo é dada, em centímetros, por

$$f(t) = 12 - 6\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right), \text{ com } t \geq 0$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

6.1. Determine a distância, em centímetros, do centro do enfeite ao solo no instante em que o triciclo começou a andar.

6.2. Determine quantas voltas completas deu a roda da frente do triciclo num percurso de 13 **metros**.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

7. A neta do Sr. Nunes tem um jogo educativo com cinco cartões, quatro azuis e um verde.

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois desses cinco cartões, e regista-se a cor de cada um dos dois cartões.

Considere a variável aleatória Z «número de cartões azuis retirados».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Z.

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)														TOTAL
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	
10	20	10	15	15	10	15	10	20	15	15	10	20	15	**200**