REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Uma empresa de marcenaria produz e vende aparadores em madeira, feitos à mão, de dois modelos, A e B.

Cada aparador do modelo A necessita de 30 metros de madeira e de 5 horas de mão de obra.

Cada aparador do modelo B necessita de 20 metros de madeira e de 10 horas de mão de obra.

Para a produção destes dois modelos de aparadores, a empresa dispõe, mensalmente, de 300 metros de madeira e de 110 horas de mão de obra.

Por cada aparador do modelo A vendido, a empresa tem o lucro de 700 euros e, por cada aparador do modelo B vendido, a empresa tem o lucro de 900 euros.

Admita que a empresa vende todos os aparadores que produz.

Determine o número de aparadores do modelo A e o número de aparadores do modelo B que a empresa deverá produzir por mês, de modo a maximizar o lucro obtido.

Na sua resposta, designe por x o número de aparadores do modelo A e por y o número de aparadores do modelo B a produzir por mês, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

*** 2.** Numa praça de uma vila, existe um quiosque que vende gelados artesanais.

Na tabela ao lado, apresentam-se os valores da temperatura máxima, em $^{\text{o}}\text{C}$, registados na vila em alguns dias e o número de gelados vendidos no quiosque em cada um desses dias.

Considere válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de gelados vendidos no quiosque num dia em que o valor da temperatura máxima seja igual a $35\ ^{\text{o}}\text{C}$.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às décimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

Temperatura máxima (ºC) (x)	**Número de gelados vendidos** (y)
26	81
31	150
33	160
25	80
28	100
24	86
27	98

3. Seja h a função que dá a altura de maré, em metros, no porto de Viana do Castelo, durante os dois primeiros dias do ano de 2022.

Admita que h pode ser definida por

$$h(t) = 2 + 1{,}5\,\text{sen}\,(0{,}5t + 1)$$

em que t é o tempo, em horas, decorrido desde as 0 horas do dia 1 de janeiro.

O argumento da função seno está em radianos.

* **3.1.** Considere a altura de maré, no porto de Viana do Castelo, às 0 horas do dia 1 de janeiro de 2022.

Quanto tempo decorreu até ao primeiro instante em que se voltou a registar a mesma altura de maré, nesse porto, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

* **3.2.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, o valor máximo e o valor mínimo da altura de maré, no porto de Viana do Castelo, nos primeiros dois dias do ano de 2022.

Apresente o resultado em metros.

4. A Luísa vai construir uma tela retangular de 20 decímetros de perímetro.

4.1. Mostre que a área, A, da tela, em decímetros quadrados, em função da medida, x, em decímetros, de um dos lados, com $0 < x < 10$, é dada por

$$A(x) = 10x - x^2$$

Na sua resposta, comece por obter uma expressão para a medida da outra dimensão da tela, em função de x.

* **4.2.** Para a pintura que a Luísa pretende realizar, é necessário que a tela tenha, pelo menos, $16\ \text{dm}^2$ de área.

Determine entre que valores pode variar a medida, x, em decímetros, de um dos lados da tela, para ter a área pretendida.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

Note que a área, A, da tela, em decímetros quadrados, em função da medida, x, em decímetros, de um dos lados, com $0 < x < 10$, é dada por $A(x) = 10x - x^2$.

5. O João vai participar numa prova de atletismo.

*** 5.1.** Admita que o tempo, em minutos, que um atleta demora a concluir essa prova é uma variável aleatória que segue a distribuição normal de valor médio $17{,}4$ minutos e desvio padrão $2{,}6$ minutos.

Nessa prova, vão participar 86 atletas.

Quantos atletas se espera que demorem mais do que 20 minutos a concluir o percurso da prova?

Justifique a sua resposta.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. A prova realizou-se numa pista circular, como se ilustra no esquema da Figura 1.

Sejam:

- g a função que dá a distância em linha reta, em metros, do João ao ponto de partida, x minutos após o início da sua prova, durante toda a primeira volta;
- h a função que dá a taxa de variação instantânea da função g, para cada valor de x.

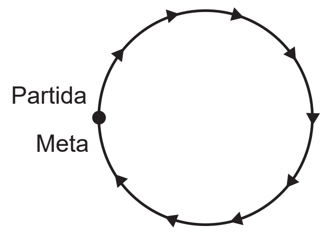

Figura 1

Considere o gráfico representado na Figura 2.

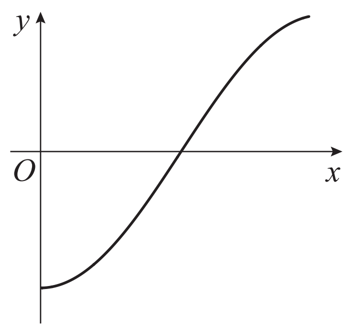

Figura 2

Justifique que este gráfico **não** pode ser o gráfico da função g nem pode ser o gráfico da função h.

6. No cenário de um estúdio de televisão, foi desenhada uma linha poligonal, com segmentos de reta posicionados, alternadamente, na vertical e na horizontal.

No esquema da Figura 3, que não está à escala, representam-se sete dos segmentos de reta que constituem essa linha:

- o primeiro segmento de reta, posicionado na vertical, tem $5\ \text{cm}$ de comprimento;
- o segundo segmento de reta, posicionado na horizontal, tem $8\ \text{cm}$ de comprimento;
- o terceiro segmento de reta, posicionado na vertical, tem $11\ \text{cm}$ de comprimento;
- e cada um dos segmentos de reta seguintes tem sempre mais $3\ \text{cm}$ de comprimento do que o segmento de reta imediatamente anterior.

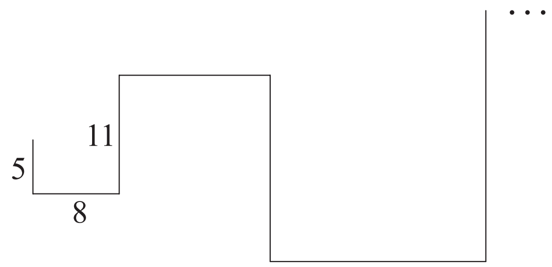

Figura 3

6.1. Determine o comprimento do 13.º segmento de reta posicionado na horizontal.

Apresente o resultado em centímetros.

6.2. Se o comprimento total da linha poligonal for $15{,}5\ \text{m}$, quantos serão os segmentos de reta que a constituem?

Justifique a sua resposta.

7. A Figura 5 é uma fotografia da Praça D. Pedro IV, em Lisboa, por volta de 1950, na qual se pode observar uma das suas fontes e o passeio que a circundava.

Figura 5

O esquema da Figura 6 representa a superfície ocupada pela fonte e pelo passeio.

Neste esquema, que não está à escala:

- estão representadas duas circunferências concêntricas;
- a região sombreada representa o passeio;
- os pontos O e P pertencem à circunferência maior;
- o segmento de reta $[OP]$ é tangente à circunferência menor no ponto T.

Admita que $\overline{OP} = 24 \text{ m}$.

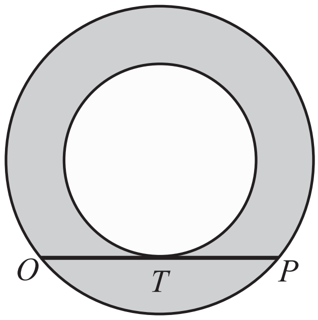

Figura 6

7.1. Determine a área da superfície ocupada pelo passeio.

Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

Na sua resposta, designe por R o raio da circunferência maior, designe por r o raio da circunferência menor e comece por escrever uma expressão para a área pedida, em função de R e de r.

7.2. Admita que, na circunferência maior da Figura 6, se fixa um referencial ortogonal e monométrico, Oxy, como se representa na Figura 7.

Relativamente a esta figura, que não está à escala, sabe-se que:

- o segmento de reta $[OP]$ está contido na reta de equação $y = x$;
- o ponto Q pertence à circunferência e tem coordenadas $\left(-\sqrt{50}, \sqrt{50}\right)$.

A unidade no referencial é o metro.

Determine a área do triângulo $[OPQ]$.

Apresente o resultado em metros quadrados.

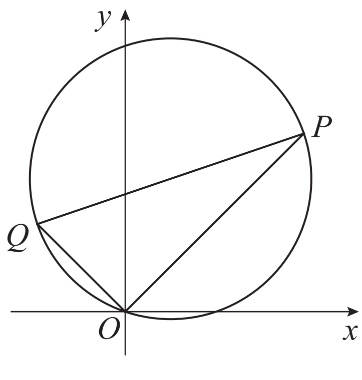

Figura 7

8. Ao largo da costa portuguesa, um petroleiro encalhou e começou a derramar crude.

Admita que a área, S, em quilómetros quadrados, da mancha de crude no oceano, t horas após o instante em que o derrame foi detetado, é dada por

$$S(t) = 10 + 40 \ln(1{,}2t + 1{,}4) \quad , \text{ com } \; 0 \leq t \leq 24$$

* **8.1.** Algum tempo depois do instante em que o derrame foi detetado, foi acionada uma equipa especializada, para intervir e minimizar o impacto ambiental do derrame.

Desde o instante em que a equipa foi acionada até ao instante em que esta chegou à zona do derrame, pronta a intervir, decorreram 3 horas e 45 minutos. Durante este intervalo de tempo, a área da mancha de crude duplicou.

Quanto tempo decorreu desde o instante em que o derrame foi detetado até ao instante em que a equipa foi acionada?

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou, a 7 quilómetros da costa.

Verifique se a mancha de crude atingiu a costa nas vinte e quatro horas decorridas após o instante em que foi detetado o derrame.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.2.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	20	16	16	16	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**5.2.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**